

Тема 1. Линейное программирование.

Практическое занятие 1. Графический метод решения задач линейного программирования.

Цель занятия: овладеть теорией и практикой применения моделей линейного программирования для принятия оптимальных управленческих решений.

Задачи, реализуемые на практическом занятии: изучить математический аппарат линейного программирования. выработать практические навыки решения задач линейного программирования графическим методом.

Методические указания

1. Прежде, чем приступить к выполнению заданий необходимо ознакомиться с теоретическим материалом по теме занятия с использованием конспектов лекций, рекомендуемой учебной литературой, посмотреть глоссарий терминов по данной теме.

2. Повторить основные определения и формулы относящиеся к теме занятия, рассмотреть решения типичных задач.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$$

К такой форме может быть сведена количественная задача с ограничениями в виде уравнений, когда число переменных $n >$ числа уравнений m на два, т. е. $n - m = 2$.

О₁. Множество допустимых решений задач линейного программирования представляют собой выпуклый многоугольник (или выпуклую многогранную область), а оптимальное решение задачи находится по крайней мере в одной из угловых точек этого многоугольника решений.

Таким образом, задачу линейного программирования можно сформулировать так:

Среди всех точек области D найти ту, которая обращает в максимальную или минимальную целевую функцию Z .

1. Вектор $\bar{N} = (c_1; c_2)$ – нормальный вектор. Он показывает направление возрастания функции Z .

2. Приравняем значение Z к какой-нибудь постоянной C

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c \quad (c = 0)$$

$$l_0: c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

Давая C различные числовые значения, будем получать прямые параллельные l_0 и перпендикулярные вектору \bar{N} . Значит, уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = C$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых.

1. Решением задачи на минимум является первая точка, в которой прямая l встречается с областью D при перемещении прямой l_0 в положительном направлении вектора \bar{N} .

$Z(E) - \min$ для первого случая

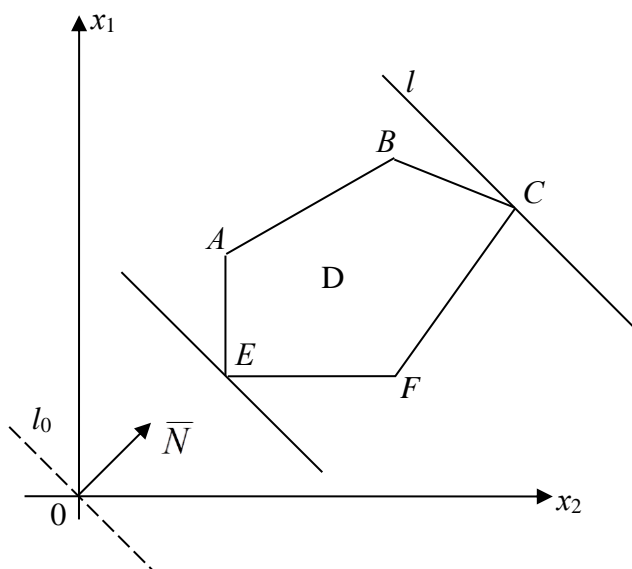
$Z(A) - \min$ для второго случая

2. Решением задачи на максимум является последняя точка, в которой прямая l встречается с областью D .

$Z(C) - \max$ для первого случая

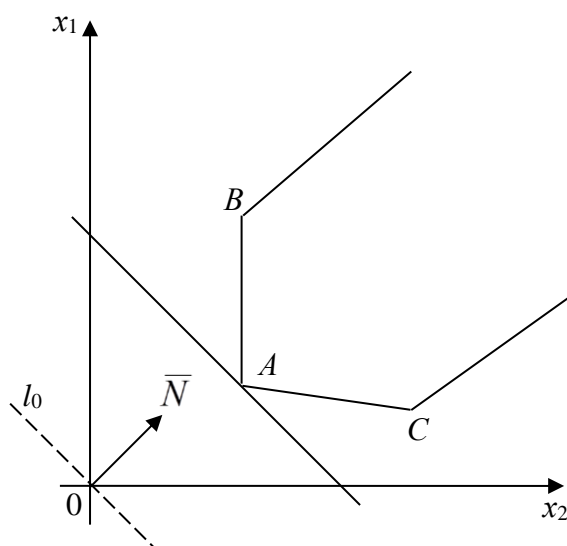
Во втором случае задача на \max решений не имеет, т.к. Z не ограничена сверху.

Аналогично может быть не ограничено снизу, тогда на минимум задача решений не имеет.



$Z(E) - \min$

$Z(C) - \max$



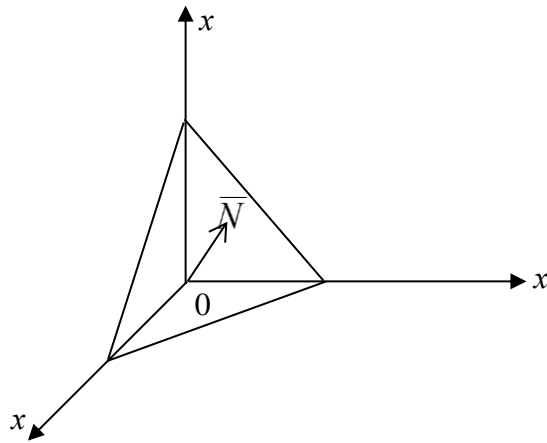
$Z(A) - \min$

Замечание.

1. Если прямая l при перемещении совпадает с отрезком BC , то все точки этого отрезка дают решение задачи на максимум (l параллельна BC). Следовательно, решений на максимум бесчисленное множество.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Аналогично, можно показать решение задачи линейного программирования в случае 3-х переменных.



Задача об использовании ресурсов.

При производстве двух видов продукции *A* и *B* предприятием используется четыре вида сырья. Расход каждого вида сырья на единицу продукции *A* - 1, 2, 0, 1 единиц соответственно; для продукции *B* – 3, 1, 1, 0. Запасы сырья составляют 18, 16, 5, 7 единиц. Прибыль от производства продукции *A* - 2 д. ед., продукции *B* – 3 д. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Решение.

Составим экономико-математическую модель задачи. Пусть x_1 - количество единиц продукции *A*, x_2 - количество единиц продукции вида *B*.

Так как на первый вид продукции необходима 1 единица первого сырья, а на второй – 3 единицы и запасы этого сырья составляют 18 единиц, получаем первое неравенство системы. Рассуждая аналогично, получаем следующую систему неравенств и целевую функцию:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max .$$

Строим область допустимых решений задачи. В прямоугольной декартовой системе координат строим прямые, соответствующие системе ограничений.

$$l_1 : x_1 + 3x_2 = 18$$

x_1	0	18
x_2	6	0

$$l_2 : 2x_1 + x_2 = 16$$

x_1	0	8
x_2	16	0

$$l_3: x_2 = 5 \text{ (параллельна } OX_1); \quad l_4: x_1 = 7 \text{ (параллельна } OX_2)$$

$$l_5: x_1 = 0 \text{ (} OX_2); \quad l_6: x_2 = 0 \text{ (} OX_1)$$

Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Находим, какие из полуплоскостей являются областями решений для каждого неравенства. Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащий на прямой, подставить в неравенство. Если получили верное неравенство, то полуплоскость является областью решений (на чертеже указываем стрелками). Пересечение всех полуплоскостей и является областью допустимых решений D .

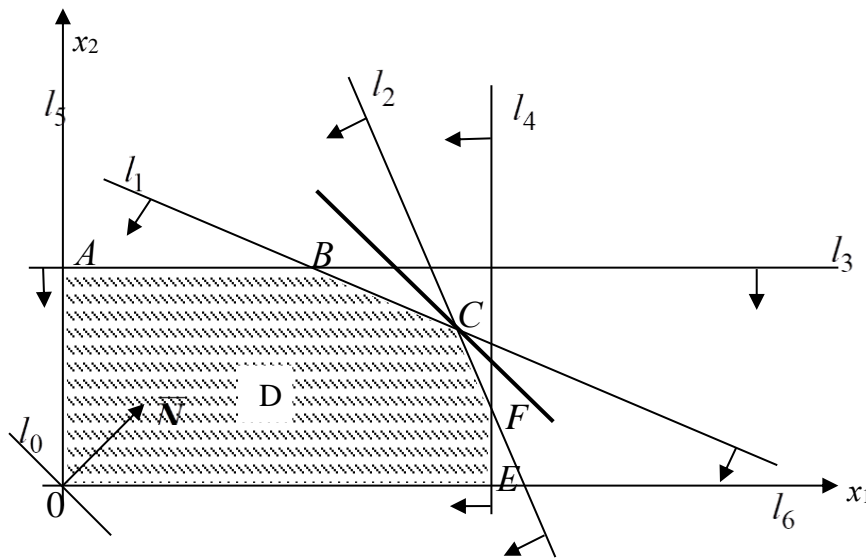
Строим нормальный вектор и прямую l_0 . Так как задача на максимум, то перемещаем ее в направлении вектора до пересечения с самой крайней точкой области и находим ее координаты.

$$\bar{N} = (2; 3); \quad Z_{\max} = r(C); \quad B: l_1 \cap l_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \quad C(6; 4)$$

$$-5x_2 = -20; \quad x_2 = 4$$

$$Z_{\max} = Z(6; 4) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24$$



Задания для решения

1. Производственному участку может быть запланировано к изготовлению на определённый плановый период времени два вида изделий: A и B . На производство единицы изделия A оборудование первого типа используется 1 час, оборудование второго типа - 4 часа. На производство единицы изделия B оборудование первого типа используется 2 часа, оборудование второго типа - 2 часа.

Фонд полезного времени первого типа оборудования составляет 120 часов, второго типа оборудования – 240 часов. Отпускная цена единицы изделия А составляет 4 руб., а изделия В - 6 руб.

Спланировать выпуск изделий А и В при условии, что план должен быть выполнен в стоимостном выражении на сумму не менее 320 руб. и оборудование первого типа должно быть загружено минимально.

Решить задачу графическим методом.

2. При производстве двух видов краски А и В предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице. Прибыль от производства краски вида А - 3 усл. ед., краски вида В – 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	А	В	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

3. В рационе животных используется два вида кормов. Животные должны получать три вида веществ. Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты и решить задачу графически. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Содержание питательного вещества в единице корма		Необходимое количество питательных веществ
	А	В	
1	2	1	12
2	1	1	10
3	2	3	24
Цена	60	60	